

INEGALITĂȚI MATEMATICE:

*o propunere de opțional
la nivel de învățământ liceal*

Editura Cartea Vrânceană

ISBN 978-606-95212-1-2

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}, i \in \{1; 2; \dots; n\}$ și $\forall p \geq 1$.

$$\sum_{i=1}^n \sin x_i \leq n \sin \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right), x_i \in [0; \pi], i \in \{1; 2; \dots; n\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

$$x^x y^y z^z \geq (xyz)^{\frac{x+y+z}{3}}, \forall x, y, z > 0$$

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

MIRELA PÎRVU

INEGALITĂȚI MATEMATICE:
o propunere de opțional la nivel de
învățământ liceal

2021

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

PÎRVU, MIRELA

INEGALITĂȚI MATEMATICE: o propunere de opțional la nivel de învățământ liceal

ISBN 978-606-95212-1-2

EDITURA CARTEA VRÂNCEANĂ

Casa Corpului Didactic "Simion Mehedinți" Vrancea

Str. Eroilor, nr.2, Focșani, Vrancea

2021

Tehnoredactare și corectură: Mirela Pîrvu

Coperte: Corina Simionescu

© Mirela Pîrvu

Toate drepturile rezervate

ARGUMENT

Scopul acestui auxiliar este de a face cunoscute posibilitățile de cunoaștere și utilizare a unor strategii de rezolvare a unor probleme cu caracter practic sau teoretic folosind inegalitățile în cadrul unui opțional ales conștient de elevi. Asimilarea cunoștințelor de bază în domeniul inegalităților se poate dovedi de un real folos în înțelegerea noțiunilor de matematică în general, dar și în viața profesională viitoare. Din punct de vedere teoretic studiul aprofundat al inegalităților este pe terenul analizei matematice.

Pe de altă parte, participarea cu succes la olimpiadele și concursurile școlare presupune o pregătire suplimentară temeinică. Lecțiile despre inegalități algebrice și geometrice vor lărgi sfera de cunoștințe și abilități matematice ale elevilor și vor duce la îmbunătățirea rezultatelor acestora la examene și concursuri de specialitate.

Curriculumul la decizia școlii (CDS) este, prin dreptul de a lua decizii conferit școlii, emblema puterii reale a acesteia. Derivată din libertatea, oferită de planurile-cadru de învățământ, de a

decide asupra unui segment al *Curriculumului național*, această putere da posibilitatea definirii unor trasee particulare de învățare ale elevilor.

Annual, prin oferta școlii, elevului de liceu i se dă posibilitatea să aleagă, la fiecare arie curriculară, un număr de discipline opționale. Raportul dintre trunchiul comun și curriculum la decizia școlii variază pe parcursul liceului. Procentul afectat CDȘ se majorează progresiv.

La clasa a XI-a, profil real, specializarea matematică-informatică, elevii au matematica 4 ore pe săptămână și o programă destul de încărcată. În cadrul acestei programe inegalitățile se regăsesc și nu prea. De aceea, în cadrul CDȘ, este venită următoarea propunere de opțional : ***“Inegalități algebrice și geometrice tratate la nivel neelementar”***.

CAPITOLUL 1: Utilizarea funcțiilor convexe; Inegalitățile lui Jensen

1. Până să vedem ce ne poate înlesni convexitatea, e normal să ne întrebăm cum identificăm această proprietate la exemplul concret de funcție cu care lucrăm.

Răspunsul pare simplu:

verificăm (J) și continuitatea lui f pe I . Altfel, verificăm direct și nemijlocit (C) . Altfel, dacă f este de două ori derivabilă, $f'' \geq 0$ înseamnă convexitate. Și mai poate fi ceva : o colecție de reguli banale, dar foarte eficiente, de a obține convexitatea prin operații algebrice și de compunere, etc.

De exemplu, la clasa a IX-a, chiar imediat după încheierea capitolului de trigonometrie, putem justifica o inegalitate “primordială”,

$$\sum_{i=1}^n \sin x_i \leq n \sin \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right), x_i \in [0; \pi], i \in \{1; 2; \dots; n\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

fără referire la funcții concave, ci doar cu

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \left(\frac{x + y}{2} \right), \forall x, y \in [0; \pi].$$

Într-adevăr, ultima inegalitate este echivalentă cu

$$\sin \frac{x+y}{2} \left(1 - \cos \frac{x-y}{2} \right) \geq 0 \quad (\text{adevărată}),$$

cu egalitate dacă $x = y$.

Obținem nemijlocit particularizarea

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \left(p \leq \frac{3\sqrt{3}R}{2} \right),$$

valabilă în orice triunghi ABC, cu egalitate numai dacă triunghiul este echilateral.

În schimb, pentru a lucra cu $\sin x$ funcție concavă pe $[0; \pi]$ avem nevoie (și) de continuitatea funcției, ceea ce se obține direct, cu ajutorul unei inegalități analitice, extrem de importantă,

$$(A) \quad |\sin x| \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

În aceeași situație se află $a^x, \ln x, \dots$ a căror certificare (J) este trivială, dar care cer neapărat continuitate.

Situația se modifică drastic în cazul funcțiilor, de largă aplicabilitate ,

$$f(x) = x \ln x, g(x) = x^a \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}), x > 0.$$

Aici se impune folosirea derivatei secunde , evitându-se tertipurile pretins “elementare”. În acest caz f, g sunt indefinite derivabile, cu

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 ; g''(x) = a(a-1)x^{a-2}$$

cu interpretările: f strict convexă ,

g strict convexă, pentru $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ și strict concavă, dacă $a \in (0; 1)$.

De ținut minte că $f + ax + b$ rămâne (strict) convexă, respectiv (strict) concavă, dacă f este astfel.

La compuneri de funcții se pot alcătui tabele cu reguli de memorat și nu prea. Este mai bine să tragem concluzii de la caz la caz.

Exemplu. Dacă $f: I \rightarrow (0; +\infty)$ (strict) concavă,

atunci $\frac{1}{f}$ este (strict) convexă.

Demonstrația se încheie la nivel elementar,

cu aplicarea inegalității CBS :

$$\frac{1}{f(\lambda x + \mu y)} \leq \frac{1}{\lambda f(x) + \mu f(y)} = \frac{(\lambda + \mu)^2}{\lambda f(x) + \mu f(y)} \leq \frac{\lambda}{f(x)} + \frac{\mu}{f(y)},$$
$$\lambda + \mu = 1.$$

2. Pentru $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o definiție echivalentă a convexității este expresia

$$(C') \quad \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ y & f(y) & 1 \\ z & f(z) & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \forall x, y, z \in I, x < y < z,$$

sau, explicitat,

$$f(x)(z - y) + f(y)(x - z) + f(z)(y - x) \geq 0$$

sau, “mai geometric”,

$$(C'') \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}, \forall x < y < z.$$

Aplicație. Pentru orice $x, y > 0$, are loc inegalitatea

$$x^y + y^x > 1,$$

iar minorantul este cel mai bun ,

$$\text{adică } \inf_{x,y>0} (x^y + y^x) = 1 .$$

Soluție. Rezultatul se verifică imediat dacă $y \geq 1$.

Lucrăm mai departe cu $x, y \in (0; 1)$.

Pentru $x \in (0; 1)$ fixat considerăm funcția

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$, $f(t) = x^t$, funcție exponentială, deci strict

convexă, de unde, conform (C'') obținem

$$\frac{x^{y-1} - 1}{1 - y} < \frac{x - x^{1-y}}{1 - (1 - y)} \Leftrightarrow x^{1-y} < x + y - xy \Leftrightarrow x^y > \frac{x}{x + y - xy} .$$

Schimbăm x cu y :

$$y^x > \frac{y}{x + y - xy}$$

și adunând ultimile două inegalități, avem

$$x^y + y^x > \frac{x+y}{x+y-xy} > 1, \quad \forall x, y \in (0; 1).$$

Pentru $x > 0$ fixat, avem

$$\lim_{y \downarrow 0} (x^y + y^x) = 1,$$

ceea ce justifică $\inf_{x, y > 0} (x^y + y^x) = 1$.

3. O aplicație clasică a convexității stricte a funcției

$f(x) = x \ln x$, dovedită mai înainte:

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ cu

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$

și definim media ponderată (de parametrii $(a; \lambda)$)

$$M(x) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^x \right)^{\frac{1}{x}}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

Dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, atunci $M(x) = a$, $\forall x \in R^*$ și pentru orice sistem $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (cazul trivial).

Lucrăm pentru $a_1, a_2, \dots, a_n$, nu toate egale.

Avem $M(x)$ continuă pe R^* și $\lim_{x \rightarrow 0} M(x) = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n}$, pentru $n \geq 2$, astfel că M se poate prelungi prin continuitate pe tot R :

$$M(x) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^x \right)^{\frac{1}{x}}, & x \in R^* \\ \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i}, & x = 0 \end{cases},$$

O funcție $R \rightarrow R$, continuă.

Calculăm limitele la capete:

$$\begin{aligned} M(\infty) &= \lim_{x \rightarrow \infty} M(x) = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad M(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} M(x) \\ &= \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \end{aligned}$$

Cu $M(-\infty) < M(\infty)$, din ipoteza asupra numerelor a_i .

“Miezul aplicației” este justificarea afirmației

$M(x)$ este strict crescătoare pe R .

Demonstrația este practicabilă la o clasa bună de a XI-a.

$$\begin{aligned}\text{Pentru } x \neq 0, \quad (\ln M(x))' &= \left(\frac{1}{x} \ln \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^x \right)' = \\ &= x \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^x \ln a_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^x \ln \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^x = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i^x) - f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^x\right) > 0,\end{aligned}$$

Unde $f(x) = x \ln x$, iar $x_i = a_i^x$, $i \in \{1; 2; \dots; n\}$ nu toate egale când $x \neq 0$.

Rezultă că $\ln M$ este o funcție strict crescătoare pe $(-\infty; 0)$ și pe $(0; +\infty)$, dar continuă în 0,

adică M este strict pozitivă și strict crescătoare pe R .

Altfel spus, $M: R \rightarrow (\min\{a_i\}; \max\{a_i\})$ e bijecție strict crescătoare. Iar la aceasta aportul esențial l-a adus funcția necomună $x \ln x$.

4. Și alte povești minunate izvorăsc din (C'') , pe care o putem scrie comod ("simbolic")

$$[x, y] \leq [y, z], \quad \text{cu } x, y, z \in I, x < y < z.$$

Ordonarea $x < y < z$ nu va mai fi amintită, cu excepția situațiilor în care vom avea și alte intercalări.

Cum în realitate, "y între x și y" se scrie

$$y = \frac{z-y}{z-x} \cdot x + \frac{y-x}{z-x} \cdot z = \lambda x + (1-\lambda)z, \lambda = \frac{z-y}{z-x},$$

și convexitatea lui f pe I se scrie

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(z) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)z) = f(y),$$

cu încă două transcrieri, echivalente:

$$(1 - \lambda)(f(z) - f(x)) \geq f(y) - f(x) ,$$

$$f(z) - f(y) \geq \lambda(f(z) - f(x)) ,$$

adică

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} ,$$

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} \geq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} ,$$

adică, “simbolic” ,

$$(*) \quad [x, y] \leq [x, z] ,$$

$$(**) \quad [x, z] \leq [y, z] .$$

Semnificația geometrică este mai mult decât clară: este vorba despre ordonarea crescătoare a pantelor unor coarde pe graficul funcției convexe, etc.

La f strict convexă în $[x, y] \leq [y, z]$ și în $(*)$, respectiv $(**)$, inegalitățile devin stricte.

Dacă $x < z$, iar y și t sunt arbitrare, între x și z , atunci avem următorul corolar (oarecum) spectaculos:

$$(+) \quad [x, y] \leq [x, z] \leq [t, z] \quad ,$$

$$(+ +) \quad [x, t] \leq [x, z] \leq [y, z] \quad .$$

Dacă $-x = z - t$, adică $x + z = y + t$, atunci obținem

inegalitatea Karamata :

$$(K_0) \quad f(x) + f(z) \geq f(y) + f(t) \quad ,$$

$$\forall x < y, t < z, x + z = y + t \quad .$$

O forma particulară remarcabilă a inegalității (K_0) este

$$(K_1) \quad f(a + b - c) + f(c) \leq f(a) + f(b) \quad ,$$

$$\forall a, b \in I, a < b \quad , \quad c \in (a; b) \quad \text{și}$$

f funcție convexă.

Într-adevăr, notăm $a + b - c = x \in (a; b)$,

deoarece $x < b \Leftrightarrow c > a$, iar $x > a \Leftrightarrow c < b \cdots$

Așa stând lucrurile, putem afirma că pentru

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq b \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1 \end{array} \right.$$

Obținem inegalitatea din corolar

$$f\left(a + b - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) + f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq f(a) + f(b) .$$

Cu aceleași ipoteze se obține o inegalitate mult mai interesantă ,subtil
mai fină decât cea de mai sus:

$$(\blacksquare) \quad f\left(a + b - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq f(a) + f(b) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) .$$

Demonstrație. Avem succesiv, pentru

$$x_i = t_i a + (1 - t_i) b , \quad t_i \in [0; 1] , \quad i \in \{1; 2; \dots; n\} ,$$

$$\begin{aligned}
 f\left(a + b - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i ((1 - t_i)a + t_i b)\right) \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f((1 - t_i)a + t_i b) \leq \sum_{i=1}^n (\lambda_i (1 - t_i)f(a) + \lambda_i t_i f(b)) = \\
 &= f(a) + f(b) - \sum_{i=1}^n \lambda_i (t_i f(a) + (1 - t_i)f(b)) \leq \\
 &\leq f(a) + f(b) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(t_i a + (1 - t_i)b) = \\
 &= f(a) + f(b) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) .
 \end{aligned}$$

Inegalitatea (■) este un exemplu de extrapolare ingenioasă a unor canoane bătute și răz-batute din timpul bunicilor.

**CAPITOLUL 2: Inegalități clasice;
demonstrații neelementare**

1. INEGALITATEA MEDIILOR

O demonstrație foarte frumoasă aparține lui Liouville

(Mitrinovic D. S., [3]). Acesta studiază și cazul de egalitate.

Mai departe vom demonstra inegalitatea

$G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq A(a_1, a_2, \dots, a_n)$, adică

$$(GA) \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in (0; \infty), n \in N, n \geq 2.$$

$$\text{Fie } P(n): \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in (0; \infty), n \in N, n \geq 2.$$

Pentru $n = 2$.

Fie $a_1, a_2 > 0$.

Considerăm funcția $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a_1 - 2\sqrt{a_1x}$
derivabilă,

$$f'(x) = 1 - \frac{a_1}{\sqrt{a_1x}} = \frac{\sqrt{a_1}(\sqrt{x} - \sqrt{a_1})}{\sqrt{a_1x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a_1$$

x	0	a_1	∞
$f'(x)$		- - 0 + + +	
$f(x)$	↓	0	↑

Conform tabelului de variație, $f(x) \geq 0, \forall x > 0$.

Pentru $x = a_2$ obținem inegalitatea $a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1a_2} \geq 0$ și astfel

$P(2)$ este adevărată.

Egalitatea se obține pentru $a_1 = a_2$.

Demonstrăm că $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$P(n+1): \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1},$$

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in (0; \infty)$$

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in (0; \infty)$.

Considerăm funcția $g: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$g(x) = x + a_1 + a_2 + \cdots + a_n - (n+1) \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_n x}$ derivabilă,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{\sqrt[n+1]{(a_1 a_2 \cdots a_n x)^n}} = \\ &= \frac{\sqrt[n+1]{(a_1 a_2 \cdots a_n)^n} (n \sqrt[n+1]{x^n} - \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_n})}{\sqrt[n+1]{(a_1 a_2 \cdots a_n x)^n}} \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^n = a_1 a_2 \cdots a_n$$

x	$0 \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad \infty$
$g'(x)$	$- \quad - \quad - \quad 0 \quad + \quad +$
$g(x)$	$\downarrow \quad g(\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}) \quad \uparrow$

Din $P(n)$ adevărată obținem

$$g(\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq 0.$$

Conform tabelului de variație $g(x) \geq 0, \forall x > 0$.

Pentru $x = a_{n+1}$ deducem că

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} - (n+1)\sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}} \geq 0$$

și astfel $P(n+1)$ este adevărată.

Deci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

2. INEGALITATEA LUI HÖLDER

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1; 2; \dots; n\}$ și $\forall p, q > 1$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Egalitatea are loc dacă $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ ai $a_i^p = \gamma b_i^q$

iar $a_i, b_i \geq 0$, $\forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$ sau

$a_i, b_i \leq 0$, $\forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$

Demonstrație. Aplicăm metoda inducției matematice.

$$P(n): \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \forall a_i, b_i \in \mathbb{R},$$

$i \in \{1; 2; \dots; n\}$ și $\forall p, q > 1$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Pentru $n = 2$ avem de demonstrat inegalitatea

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq (|a_1|^p + |a_2|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (|b_1|^q + |b_2|^q)^{\frac{1}{q}} \quad (1)$$

Demonstrăm mai întâi

$$|a_1 b_1| + |a_2 b_2| \leq (|a_1|^p + |a_2|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (|b_1|^q + |b_2|^q)^{\frac{1}{q}} \quad (2).$$

Considerăm funcția

$$f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = (|a_1|^p + |a_2|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (|b_1|^q + x^q)^{\frac{1}{q}} - |a_1||b_1| - |a_2|x$$

$$\begin{aligned} \text{Avem } f \text{ derivabilă și } f'(x) &= (|a_1|^p + |a_2|^p)^{\frac{1}{p}} (|b_1|^q + \\ x^q)^{\frac{1}{q}-1} x^{q-1} - |a_2| &= \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{|a_1|^p + |a_2|^p}{|b_1|^q + x^q} \right)^{\frac{1}{p}} x^{\frac{1}{p-1}} - |a_2|$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{|a_1|^p + |a_2|^p}{|b_1|^q + x^q} \right)^{\frac{1}{p}} = x^{-\frac{1}{p-1}} |a_2| \Leftrightarrow$$

$$\frac{|a_1|^p + |a_2|^p}{|b_1|^q + x^q} = x^{-q} |a_2|^p, \quad |a_1|^p + |a_2|^p = x^{-q} |a_2|^p |b_1|^q + |a_2|^p$$

Dacă $|a_1| \neq 0$, atunci $x^q = \frac{|a_2|^p |b_1|^q}{|a_1|^p} \Leftrightarrow x = |b_1| \left| \frac{a_2}{a_1} \right|^{\frac{p}{q}}$ și

$$f\left(|b_1| \left| \frac{a_2}{a_1} \right|^{\frac{p}{q}}\right) =$$

$$\begin{aligned} & (|a_1|^p + |a_2|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(|b_1|^q + \left(|b_1| \left| \frac{a_2}{a_1} \right|^{\frac{p}{q}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} - |a_1| |b_1| - |a_2| |b_1| \left| \frac{a_2}{a_1} \right|^{\frac{p}{q}} \\ &= \frac{|b_1|}{|a_1|^{\frac{p}{q}}} (|a_1|^p + |a_2|^p)^{\frac{1}{p}} (|a_1|^p + |a_2|^p)^{\frac{1}{q}} - \frac{|b_1|}{|a_1|^{\frac{p}{q}}} (|a_1|^p + |a_2|^p) = 0 \end{aligned}$$

x	0	$ b_1 \left \frac{a_2}{a_1} \right ^{\frac{p}{q}}$	∞
$f'(x)$	- - - - 0 + +		
$f(x)$	↓	0	↑

Conform tabelului de variație, $f(x) \geq 0, \forall x > 0$.

Dacă $|b_2| > 0$, luăm $x = |b_2|$. Din $f(|b_2|) \geq 0$, adică

$$|a_1 b_1| + |a_2 b_2| \leq (|a_1|^p + |a_2|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (|b_1|^q + |b_2|^q)^{\frac{1}{q}} \text{ si}$$

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq |a_1 b_1| + |a_2 b_2| \text{ obținem (1).}$$

Dacă $|b_2| = 0$ sau $|a_1| = 0$ inegalitatea (1) se verifică imediat.

Demonstrăm că $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$P(n+1): \left| \sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \forall a_i, b_i \in R,$$

$$i \in \{1; 2; \dots; n; n+1\} \text{ și}$$

$$\forall p, q > 1 \text{ cu } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i \right| &\leq \sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i| = \sum_{i=1}^n |a_i b_i| + |a_{n+1} b_{n+1}| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} + |a_{n+1} b_{n+1}| \end{aligned}$$

$$\text{Notăm } a = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \text{ și } b = \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq 0.$$

Din cazul $n = 2$, avem, conform (2),

$$|ab| + |a_{n+1}b_{n+1}| \leq (|a|^p + |a_{n+1}|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (|b|^q + |b_{n+1}|^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{Dar, } (|a|^p + |a_{n+1}|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (|b|^q + |b_{n+1}|^q)^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

și astfel $P(n+1)$ este adevărată.

Deci, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in N, n \geq 2$.

3. INEGALITATEA LUI MINKOWSKI

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\forall n \in N^*$, $\forall a_i, b_i \in R, i \in \{1; 2; \dots; n\}$ și $\forall p \geq 1$.

Avem egalitate dacă $\exists \gamma \in R$ ai $a_i = \gamma b_i \forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$.

Caz particular. Pentru $p = 2$ și $a_i, b_i \in R, i \in \{1; 2; \dots; n\}$ are loc inegalitatea (*)

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2} \leq \\ & \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \end{aligned}$$

Avem egalitate dacă $\exists \gamma \in R$ ai $a_i = \gamma b_i, \forall i \in$

$\{1; 2; \dots; n\}$ și $\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq 0$.

Demonstrație. Ridicăm la pătrat ambii membri ai inegalității (*) .

$$\begin{aligned}
 (*) \Leftrightarrow (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2 \\
 \leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + \\
 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)}
 \end{aligned}$$

Inegalitatea (*) se reduce la $2a_1b_1 + 2a_2b_2 + \dots + 2a_nb_n \leq$

$$2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \quad (**)$$

Dacă $\sum_{i=1}^n a_i b_i < 0$, atunci inegalitatea (**) se verifică strict.

Dacă $\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq 0$, atunci ridicăm la pătrat în (**) și obținem

$$\begin{aligned}
 (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 &\leq \\
 &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \text{ (adevărat, conform CBS)}
 \end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ aî $a_i = \gamma b_i, \forall i \in$

$\{1; 2; \dots; n\}$ și $\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq 0$.

Mai departe vom demonstra prin inducție cazul în care

$a_i, b_i > 0, i \in \{1; 2; \dots; n\}$.

$$P(n): \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\forall a_i, b_i > 0, i \in \{1; 2; \dots; n\}, \forall p \geq 1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Pentru $n = 2$ avem de demonstrat inegalitatea

$$((a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (a_1^p + a_2^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + b_2^p)^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a_1^p \left(1 + \frac{b_1}{a_1} \right)^p + a_2^p \left(1 + \frac{b_2}{a_2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq (a_1^p + a_2^p)^{\frac{1}{p}} + \left(a_1^p \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^p + a_2^p \left(\frac{b_2}{a_2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Considerăm $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) =$

$$= \left(a_1^p \left(1 + \frac{b_1}{a_1} \right)^p + a_2^p (1+x)^p \right)^{\frac{1}{p}} - (a_1^p + a_2^p)^{\frac{1}{p}} - \left(a_1^p \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^p + a_2^p x^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

f este derivabilă.

$$f'(x) = a_2^p (1+x)^{p-1} \left(a_1^p \left(1 + \frac{b_1}{a_1} \right)^p + a_2^p (1+x)^p \right)^{\frac{1}{p}-1} -$$

$$- a_2^p x^{p-1} \left(a_1^p \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^p + a_2^p x^p \right)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$f'(x) = a_2^p (1+x)^{p-1} \left(a_1^p \left(1 + \frac{b_1}{a_1} \right)^p + a_2^p (1+x)^p \right)^{\frac{1}{p}-1} -$$

$$- a_2^p x^{p-1} \left(a_1^p \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^p + a_2^p x^p \right)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow a_2^p(1+x)^{p-1} \left(a_1^p \left(1 + \frac{b_1}{a_1} \right)^p + a_2^p(1+x)^p \right)^{\frac{1}{p}-1} =$$

$$= a_2^p x^{p-1} \left(a_1^p \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^p + a_2^p x^p \right)^{\frac{1}{p}-1},$$

$$\left(a_1^p \frac{\left(1 + \frac{b_1}{a_1} \right)^p}{(1+x)^p} + a_2^p \right)^{\frac{1}{p}-1} = \left(a_1^p \frac{\left(\frac{b_1}{a_1} \right)^p}{x^p} + a_2^p \right)^{\frac{1}{p}-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(1 + \frac{b_1}{a_1} \right)^p}{(1+x)^p} = \frac{\left(\frac{b_1}{a_1} \right)^p}{x^p},$$

$$\frac{\left(1 + \frac{b_1}{a_1} \right)^p}{\left(\frac{b_1}{a_1} \right)^p} = \frac{(1+x)^p}{x^p} \Leftrightarrow \left(\frac{a_1}{b_1} + 1 \right)^p = \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^p \Leftrightarrow x = \frac{b_1}{a_1}$$

x	0	$\frac{b_1}{a_1}$	∞			
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-
$f(x)$	$\uparrow$	0	$\downarrow$			

Conform tabelului de variație, $f(x) \leq 0, \forall x > 0$.

Alegem $x = \frac{b_2}{a_2}$ și obținem $f\left(\frac{b_2}{a_2}\right) \leq 0$,

ceea ce implică $P(2)$ adevărată.

Avem egalitate în $P(2)$ dacă $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$.

Demonstrăm că $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$P(n+1): \left(\sum_{i=1}^{n+1} (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\forall a_i, b_i > 0, i \in \{1; 2; \dots; n; n+1\}, \quad \forall p \geq 1$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n+1} (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p + (a_{n+1} + b_{n+1})^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left[\left(\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p + (a_{n+1} + b_{n+1})^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left[\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p + (a_{n+1} + b_{n+1})^p \right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

conform $P(n)$ adevărată.

Luăm $\alpha_1 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $\alpha_2 = a_{n+1}$, $\beta_1 = \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $\beta_2 = b_{n+1}$ și

cum $P(2)$ este adevărată, avem

$$((\alpha_1 + \beta_1)^p + (\alpha_2 + \beta)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\alpha_1^p + \alpha_2^p)^{\frac{1}{p}} + (\beta_1^p + \beta_2^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Obținem

$$\left[\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p + (a_{n+1} + b_{n+1})^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ și astfel } P(n+1) \text{ este adevărată .}$$

Deci, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in N, n \geq 2$.

Revenim la cazul general, prezentat la început și ne plasăm în două situații, în funcție de p .

Dacă $p = 1$, inegalitatea se verifică cu egal.

Dacă $p > 1$, luăm $q = \frac{p}{p-1} > 1$ care verifică $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ și aplicăm

inegalitatea Hölder.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p &= \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{p-1} |a_i + b_i| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{p-1} |a_i| + \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{p-1} |b_i| \leq \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]
 \end{aligned}$$

Am obținut $\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \leq (\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{q}} \left[(\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n |b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \right],$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

și cum $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, rezultă că

$(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, ceea ce trebuia demonstrat .

Capitolul 3: Inegalități cu soluții diverse

Să rezolvăm acum doua inegalitati folosind atât metodele rudimentare de lucru cât și metode mai fine : e^x funcție convexă, $\ln x$ funcție concavă, etc.

1.
$$x^x y^y z^z \geq (xyz)^{\frac{x+y+z}{3}}, \forall x, y, z > 0.$$

Soluția I. Fie $x, y, z > 0$. Dacă logaritmăm ambii membri, inegalitatea devine:

$$\begin{aligned} x \ln x + y \ln y + z \ln z &\geq \frac{(x+y+z)(\ln x + \ln y + \ln z)}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2x - y - z) \ln x + (2y - z - x) \ln y + (2z - x - y) \ln z &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - y)(\ln x - \ln y) + (y - z)(\ln y - \ln z) + (z - x)(\ln z - \ln x) &\geq 0. \end{aligned}$$

Ultima inegalitate este justificată de faptul că diferențele $a - b$ și $\ln a - \ln b$ au același semn.

Soluția II. Considerăm funcțiile

$$f, g: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln x \text{ și } g(x) = \ln x.$$

Cum f și g sunt indefinite derivabile,

$$\text{calculăm } f''(x) = \frac{1}{x} > 0, \forall x > 0 \text{ și } g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x > 0,$$

de unde rezultă că f este strict convexă, iar g este strict concavă.

Aplicăm inegalitatea Jensen (J) și avem:

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} \text{ și}$$

$$g\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{g(x) + g(y) + g(z)}{3}, \quad \forall x, y, z > 0,$$

adică

$$\begin{aligned} x \ln x + y \ln y + z \ln z &\geq 3 \cdot \frac{x+y+z}{3} \cdot \ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \\ &= (x+y+z) \cdot g\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \end{aligned}$$

$$\geq (x + y + z) \cdot \frac{g(x) + g(y) + g(z)}{3} = (x + y + z) \cdot \frac{\ln x + \ln y + \ln z}{3},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

2. (USAMO ,1999)

$$x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy} \geq (xyz)^{xy+yz+zx}, \forall x, y, z > 1.$$

Soluție . Fie $x, y, z > 1$. Dacă logaritmăm ambii membri, inegalitatea devine:

$$\begin{aligned} & (x^2 + yz) \ln x + (y^2 + zx) \ln y + (z^2 + xy) \ln z \geq \\ & \geq (xy + yz + zx)(\ln x + \ln y + \ln z) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x^2 + yz - xy - xz) \ln x + (y^2 + zx - yz - yx) \ln y + \\ & \quad + (z^2 + xy - zx - zy) \ln z \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x - y)(x - z) \ln x + (y - x)(y - z) \ln y + (z - x)(z - y) \ln z \geq 0. \end{aligned}$$

Ultima inegalitate seamăna cu inegalitatea Schur, de aceea sperăm că și demonstrațiile sunt înrudite.

Presupunem, fără să restrângem generalitatea, că

$$x \geq y \geq z > 1 \Rightarrow \ln x \geq \ln y \geq \ln z > 0 .$$

$$\text{Avem} \quad (x-y)(x-z) \ln x \geq (x-y)(y-z) \ln x \geq (x-y)(y-z) \ln y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-y)(x-z) \ln x + (y-x)(y-z) \ln y \geq 0 \text{ și cum } (z-x)(z-y) \ln z \geq 0 .$$

Adunând ultimile două inegalități, rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

Să trecem acum de la “elementar” la “mai puțin elementar” demonstrând cateva inegalități cu ajutorul calculului diferențial sau chiar integral.

Pentru aproximarea lui e^x cu funcții raționale putem urmări inegalitățile trecute în revistă de Mitrinovic în [3]:

3. (Karamata J.,1949)

$$(K_1) \quad e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad , \forall x > 0 , \forall n \in \mathbb{N} ;$$

$$(K_2) \quad e^x < 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n-x+1)n!} \quad , 0 < x < n+1, \forall n \in \mathbb{N} .$$

Demonstrație. Considerăm funcțiile $f, g: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

$$g(x) = f(x) + e^{-x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n-x+1)n!} \quad , \text{pentru } 0 < x < n+1 .$$

Funcțiile f și g sunt derivabile $f'(x) =$

$$\begin{aligned} & -e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) + e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) = \\ & = -e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!} < 0 \quad , \forall x > 0 ; \end{aligned}$$

Din $f'(x) < 0, \forall x > 0$ rezultă că f este strict descrescătoare pe $(0; \infty)$ și cum $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1$, obținem $f(x) < 1, \forall x > 0$, adică (K_1) .

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - e^{-x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n-x+1)n!} + e^{-x} \cdot \frac{x^n[(n+1)^2 - nx]}{(n-x+1)^2 n!} = \\ &= -e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!} + e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x^2 - (2n+1)x + (n+1)^2}{(n-x+1)^2} = \\ &= e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{(n-x+1)^2} > 0, \text{ pentru } 0 < x < n+1. \end{aligned}$$

Din $g'(x) > 0, \forall x > 0$ rezultă că g este strict crescătoare pe $(0; n+1)$ și cum $\lim_{x \downarrow 0} g(x) = 1$, obținem $g(x) > 1$, pentru $0 < x < n+1$, adică (K_2) .

Acum să vedem o inegalitate care a primit mai multe soluții de-a lungul timpului.

4. Dacă $0 < a < b$, atunci

$$(\blacksquare) \quad \frac{a+b}{2} > \frac{a-b}{\ln a - \ln b}.$$

Soluția I. (B. Mesihovic) Se verifică direct că

$$(1+t)^2 \geq 4t, \forall t \in \mathbb{R},$$

cu egalitate dacă și numai dacă $t = 1$.

Avem $\frac{1}{2t} > \frac{2}{(1+t)^2}$, $\forall t > 1$, de unde, prin integrare, obținem

$$\frac{1}{2} \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{dt}{t} > 2 \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{dt}{(1+t)^2},$$

adică,

$$\frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} > 2 \left(-\frac{1}{1+\frac{b}{a}} + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} > \frac{b-a}{b+a} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} > \frac{a-b}{\ln a - \ln b} .$$

Soluția II. (L.Panaitopol , V.Bândila , M.Lascu)

Fie $0 < a < b$. Notăm $\frac{b}{a} = x > 1$. Inegalitatea de demonstrat devine

$$\ln x > 2 \cdot \frac{x-1}{x+1} .$$

Considerăm funcția $f: [1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - 2 \cdot \frac{x-1}{x+1}$.

$$\text{Avem } f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 \geq 0 , \forall x \geq 1 ,$$

de unde rezultă că f este strict crescătoare pe $[1; \infty)$ și

$$f(x) > f(1) = 0 , \forall x > 1 , \text{ ceea ce trebuia demonstrat.}$$

Alte două demonstrații ale inegalității (■) au fost date de Mitrinovic .

5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât inegalitatea $\ln x \leq mx$ are loc pentru $\forall x > 0$.

Soluție. Observăm că

$$\ln x \leq mx \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq m, \text{ pentru } x > 0.$$

Considerăm funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Avem $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $\forall x > 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

x	0	e	∞					
$f'(x)$	+	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$		↑		0		↓		

Conform tabelului de variație , $x = e$ este punct de maxim al lui f pe $(0, \infty)$ și $f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e}$, $\forall x > 0$.

Am obținut că $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$, $\forall x > 0$, ceea ce implică $m \geq \frac{1}{e}$.

Bibliografie:

- [1] PANAITOPOL L., BĂNDILĂ V. , LASCU M. *Inegalități-*
Zalău,Editura Gil, 1996
- [2] BECHEANU M. , ENESCU B. *Inegalități elementare ... și mai puțin elementare-* Zalău, Editura Gil, 2002
- [3] DRÂMBE M. O. *Inegalități- idei și metode-* Zalău, Editura Gil, 2003
- [4] Colecția revistei **Gazeta Matematică**, seria B, 1970- 2021
- [5] CÎRTOAJE V. *Mathematical Inequalities, vol.1 Symmetric Polynomial Inequalities-* România, Editura University of Ploiesti, 2015
- [6] CÎRTOAJE V. *Mathematical Inequalities, vol.2 Symmetric Rational and Nonrational Inequalities-* România, Editura University of Ploiesti, 2015

[7] **CÎRTOAJE V.** *Mathematical Inequalities, vol.3 Cyclic and Noncyclic Inequalities*- România, Editura University of Ploiesti, 2015

[8] **CÎRTOAJE V.** *Mathematical Inequalities, vol.4 Extensions and Refinements of Jensen`s Inequality*- România, Editura University of Ploiesti, 2015

[9] **CÎRTOAJE V.** *Mathematical Inequalities, vol.5 Other New Methods for Creating and Solving Inequalities*- România, Editura University of Ploiesti, 2015

CUPRINS

1. Utilizarea funcțiilor convexe; Inegalitățile lui Jensen.....	5
2. Inegalități clasice; demonstrații neelementare.....	19
3. Inegalități cu soluții diverse.....	39
Bibliografie.....	49

© Mirela Pîrvu
Toate drepturile rezervate

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}, i \in \{1; 2; \dots; n\}$ și $\forall p \geq 1$.

$$\sum_{i=1}^n \sin x_i \leq n \sin\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right), x_i \in [0; \pi], i \in \{1; 2; \dots; n\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

$$x^{x^2+2yz} y^{y^2+2zx} z^{z^2+2xy} \geq (xyz)^{xy+yz+zx}, \forall x, y, z > 1$$

$$x^x y^y z^z \geq (xyz)^{\frac{x+y+z}{3}}, \forall x, y, z > 0$$

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Editura Cartea Vranceană
ISBN 978-606-95212-1-2